Laboratorio sulle distribuzioni di probabilità

Esercizi tratti dai quesiti di ammissione alla Scuola Normale Superiore di Pisa.

SCUOLA NORMALE SUPERIORE

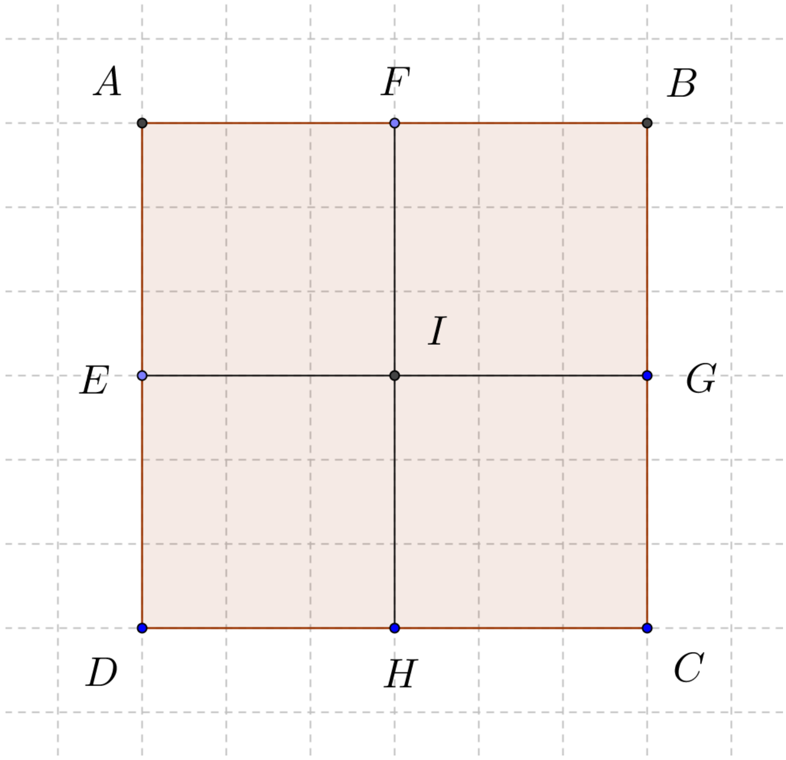
1. Calcolo combinatorio
2. Calcolo delle probabilità

1993-1994-1) Dato un quadrato di lato 1 ed assegnati cinque punti distinti $P_1, P_2, 3, P_4$ e P_5 interni al quadrato (e non appartenenti al bordo), si provi che almeno due dei cinque punti distano l'uno dall'altro meno di $1/\sqrt{2}$.
Si dimostri, inoltre, che $1/\sqrt{2}$ è la migliore costante possibile, provando che, dato ad arbitrio un numero a, con $0 < a < 1/\sqrt{2}$, esistono cinque punti P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 interni al quadrato tali che due qualunque di essi distano fra loro più di a.

Per risolvere questo esercizio, si farà uso del principio dei cassetti, detto anche legge del buco della piccionaia, afferma che se $n + k$ oggetti sono messi in n cassetti, allora almeno un cassetto deve contenere più di un oggetto. Nella figura che segue vi sono dieci piccioni in nove caselle.

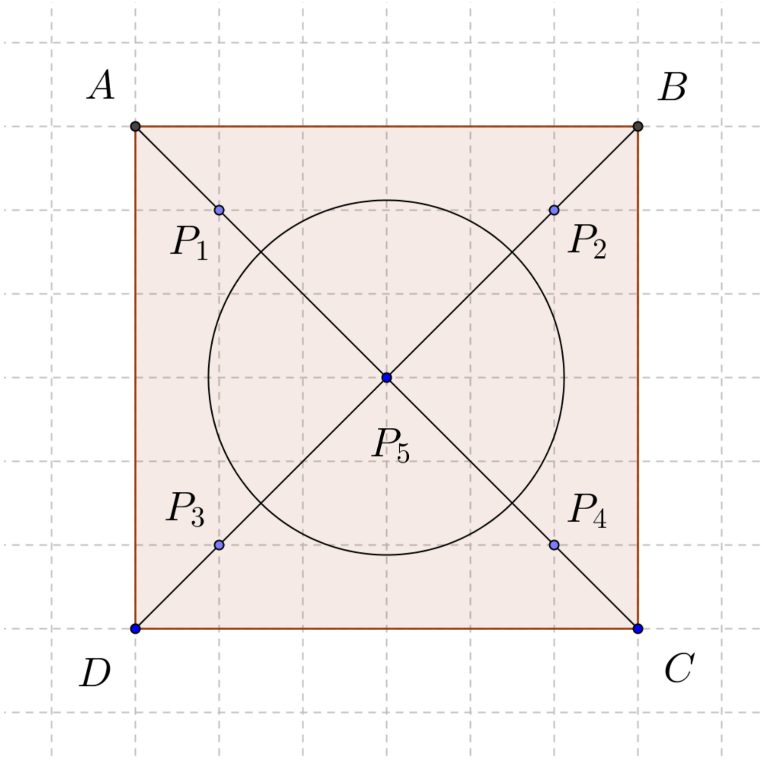
Il principio è dovuto al matematico tedesco Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (Düren, 13 febbraio 1805 - Gottinga, 5 maggio 1859), che, nel 1834, che lo utilizzò per la prima volta col nome *Schubfachprinzip*, che vuol dire proprio il principio del cassetto. Dirichlet è ricordato soprattutto per la moderna definizione formale di funzione.
Venendo all'esercizio proposto, basta suddividere il quadrato $ABCD$ in quattro parti uguali secondo gli assi dei lati. Si vengono in questo modo a formare quattro

regioni più piccole, tutte uguali e quadrate, ciascuna di lato pari alla metà del lato del quadrato di partenza, cioè $1/2$, come ad esempio $AFIE$. Allora, avendo a disposizione quattro regioni e cinque punti, in forza del principio dei cassetti, almeno due punti saranno nella stessa regione, che ha una diagonale pari a $1/\sqrt{2}$. Giacché la distanza più grande possibile tra due punti della stessa regione è uguale alla diagonale di questo quadrato, si conclude che esistono almeno due dei cinque punti distano l'uno dall'altro meno di $1/\sqrt{2}$.



Si osservi che si è concluso che la distanza deve essere meno di $1/\sqrt{2}$, dal momento che i cinque punti sono tutti interni al quadrato $ABCD$ e non possono appartenere ai bordi.

Al fine di dimostrare la seconda proposizione contenuta nel testo dell'esercizio, cioè che esistono cinque punti P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 interni al quadrato tali che due qualunque di essi distano fra loro più di $0 < a < 1/\sqrt{2}$, si esamini con attenzione la figura di seguito riportata. Dentro il quadrato $ABCD$ di lato unitario, è stata disegnata una circonferenza, concentrica con il quadrato e di raggio a: una delle infinite possibili scelte dei cinque punti richiesti viene proposta.



1988-1989-3) Un alfabeto consiste di 6 lettere così codificate

$$\cdot\,, \quad -\,, \quad \cdot\cdot\,, \quad --\,, \quad \cdot-\,, \quad -\cdot\,.$$

Una certa parola viene trasmessa senza intercalare spazi fra le lettere, viene ricevuta così una successione contenente 8 simboli tra linee e punti.
In quanti modi questo messaggio può essere letto?

Si consideri un generico segnale trasmesso, come ad esempio

$$\cdot\cdot\cdot - -\cdot\cdot - .$$

Esso contiene otto simboli tra linee e punti e si può interpretare in diverse maniere. Associando al famoso codice Morse, riportato alla fine di questo esercizio, e leggendolo ad un carattere alla volta, esso porta il messaggio

$$1-1-1-1-1-1-1-1 \quad \rightarrow \quad E\,E\,E\,T\,T\,E\,E\,T\,E\,.$$

Interpretandolo a due simboli per volta, esso porta il messaggio

$$2-2-2-2 \quad \rightarrow \quad I\,A\,N\,A\,,$$

completamente diverso dal precedente. Ancora, considerando la sequenza

$$1-2-2-2-1 \quad \rightarrow \quad E\,I\,M\,I\,T\,.$$

L'esercizio chiede di determinare, cioè contare, in quante maniere diverse un siffatto messaggio possa essere letto e rappresenta un classico esercizio di calcolo combinatorio. Partendo dal messaggio assegnato, esistono molte maniere di leggerlo: di seguito un elenco completo.

(α) Una carattere per volta: un solo caso è possibile

$$\binom{8}{8} = 1\,.$$

$$\cdot\,\cdot\,\cdot\ -\ -\cdot\,\cdot\ -$$

(β) Una sola coppia e sei caratteri singoli: i casi possibili sono

$$\binom{7}{6} = 7\,.$$

1) $\boxed{\cdot\,\cdot}\cdot\ -\ -\cdot\,\cdot\ -$ 2) $\cdot\boxed{\cdot\,\cdot}-\ -\ \cdot\,\cdot\ -$ 3) $\cdot\,\cdot\boxed{\cdot\ -}\ -\cdot\,\cdot\ -$
4) $\cdot\,\cdot\,\cdot\ \boxed{-\ -}\cdot\,\cdot\ -$ 5) $\cdot\,\cdot\,\cdot\ -\boxed{-\ \cdot}\cdot\ -$ 6) $\cdot\,\cdot\,\cdot\ -\ -\boxed{\cdot\,\cdot}-$
7) $\cdot\,\cdot\,\cdot\ -\ -\cdot\boxed{\cdot\ -}$

(γ) Due coppie e quattro caratteri singoli: i casi possibili sono

$$\binom{6}{4} = 15\,.$$

1) $\boxed{\cdot\,\cdot}\boxed{\cdot\ -}\ -\cdot\,\cdot\ -$ 2) $\cdot\boxed{\cdot\,\cdot}\ \boxed{-\ -}\cdot\,\cdot\ -$ 3) $\cdot\,\cdot\boxed{\cdot\ -}\boxed{-\ \cdot}\cdot\ -$
4) $\cdot\,\cdot\,\cdot\ \boxed{-\ -}\boxed{\cdot\,\cdot}-$ 5) $\cdot\,\cdot\,\cdot\ -\boxed{-\ \cdot}\boxed{\cdot\ -}$ 6) $\boxed{\cdot\,\cdot}\cdot\ -\ -\cdot\boxed{\cdot\ -}$
7) $\boxed{\cdot\,\cdot}\cdot\ -\ -\boxed{\cdot\,\cdot}-$ 8) $\boxed{\cdot\,\cdot}\cdot\ -\boxed{-\ \cdot}\cdot\ -$ 9) $\boxed{\cdot\,\cdot}\cdot\ \boxed{-\ -}\cdot\,\cdot\ -$
10) $\cdot\boxed{\cdot\,\cdot}-\ \boxed{-\ \cdot}\cdot\ -$ 11) $\cdot\boxed{\cdot\,\cdot}-\ -\ \boxed{\cdot\,\cdot}-$ 12) $\cdot\boxed{\cdot\,\cdot}-\ -\ \cdot\boxed{\cdot\ -}$
13) $\cdot\,\cdot\boxed{\cdot\ -}\ -\boxed{\cdot\,\cdot}-$ 14) $\cdot\,\cdot\boxed{\cdot\ -}\ -\cdot\boxed{\cdot\ -}$ 15) $\cdot\,\cdot\,\cdot\ \boxed{-\ -}\cdot\boxed{\cdot\ -}$

(δ) Tre coppie e due caratteri singoli: i casi possibili sono

$$\binom{5}{2} = 10\,.$$

1) $\boxed{\cdot\ \cdot}\boxed{\cdot\ -}\boxed{-\ \cdot}\cdot\ -$ 2) $\boxed{\cdot\ \cdot}\boxed{\cdot\ -}\ -\boxed{\cdot\ \cdot}-$ 3) $\boxed{\cdot\ \cdot}\boxed{\cdot\ -}\ -\cdot\boxed{\cdot\ -}$

4) $\boxed{\cdot\ \cdot}\cdot\ \boxed{-\ -}\boxed{\cdot\ \cdot}-$ 5) $\boxed{\cdot\ \cdot}\cdot\ \boxed{-\ -}\cdot\boxed{\cdot\ -}$ 6) $\cdot\boxed{\cdot\ \cdot}\ \boxed{-\ -}\boxed{\cdot\ \cdot}-$

7) $\cdot\boxed{\cdot\ \cdot}\ \boxed{-\ -}\cdot\boxed{\cdot\ -}$ 8) $\cdot\boxed{\cdot\ \cdot}-\ \boxed{-\ \cdot}\boxed{\cdot\ -}$ 9) $\cdot\ \cdot\boxed{\cdot\ -}\boxed{-\ \cdot}\boxed{\cdot\ -}$

10) $\boxed{\cdot\ \cdot}\cdot\ -\boxed{-\ \cdot}\boxed{\cdot\ -}$

(ε) Quattro coppie: un solo caso è possibile

$$\binom{4}{0} = 1\,.$$

$$\boxed{\cdot\ \cdot}\boxed{\cdot\ -}\boxed{-\ \cdot}\boxed{\cdot\ -}$$

In definitiva, si può affermare che il numero complessivo N di possibili letture del messaggio è pari a

$$N = \sum_{k=0}^{4} \binom{8-2k}{8-k} = 1 + 7 + 15 + 10 + 1 = 34\,.$$

Il codice Morse fu inventato da Samuel Finley Breese Morse nel 1836. È formato da combinazioni di segnali lunghi e brevi, linea e punto, con cui si rappresentano tutti numeri e le lettere dell'alfabeto. Punti e linee si possono riprodurre vocalmente usando la sillaba TI per i punti e la sillaba TA per le linee.

Usato inizialmente per la telegrafia a filo, il codice Morse è stato successivamente adottato per la radiotelegrafia. L'abbreviazione in codice Morse più conosciuta è senz'altro l'SOS

$$TI - TI - TI \quad TA - TA - TA \quad TI - TI - TI\,.$$

Dopo oltre un secolo e mezzo dalla sua invenzione (primo collegamento telegrafico Washington-Baltimora, 1844), l'alfabeto Morse, composto da convenzionali sequenze di linee e punti al posto delle varie lettere, è ancora usato in molti sistemi di comunicazioni radiotelegrafiche. Comunicano in codice Morse, oltre che con altri sistemi, le navi mercantili tra loro e con la terraferma, e lo utilizzano i radiofari che guidano gli aerei. È molto usato anche dai radioamatori, soprattutto quando utilizzano i ponti radio a loro riservati. Questi sono vere e proprie centrali di collegamento che consentono di mettersi in contatto con altri radioamatori a grandi distanze. È per questo che i radioamatori debbono sostenere una prova di telegrafia in codice Morse per ottenere la 'patente'. Naturalmente, il vecchio tasto è stato sostituito da sistemi elettronici: agli apparecchi che usano il codice Morse è sufficiente ascoltare gli impulsi per tradurli "in chiaro".

Lettere	Codice	Lettere	Codice	Numeri	Codice	Punteg.	Codice
A	• —	N	— •	0	— — — — —	.	• — • — • —
B	— • • •	O	— — —	1	• — — — —	,	— — • • — —
C	— • — •	P	• — — •	2	• • — — —	:	— — — • • •
D	— • •	Q	— — • —	3	• • • — —	?	• • — — • •
E	•	R	• — •	4	• • • • —	=	— • • • —
F	• • — •	S	• • •	5	• • • • •	-	— • • • • —
G	— — •	T	—	6	— • • • •	(	— • — — •
H	• • • •	U	• • —	7	— — • • •	)	— • — — • —
I	• •	V	• • • —	8	— — — • •	"	• — • • — •
J	• — — —	W	• — —	9	— — — — •	'	• — — — — •
K	— • —	X	— • • —			/	— • • — •
L	• — • •	Y	— • — —			Sottolineato	• • — — • —
M	— —	Z	— — • •			@	• — — • — •

1993-1994-3) Dato un intero $n \geq 3$, si considerino i primi 3^n numeri interi non negativi, e, per ciascuno di essi, si indichi con $(a_1 a_2 \cdots a_n)$ la rappresentazione in base 3:

$$a_n 3^{n-1} + a_{n-1} 3^{n-2} + \cdots + a_2 3 + a_1$$

ove a_j è intero con $0 \leq a_j \leq 2$ per $j = 1, \cdots, n$.

i) Trovare quanti sono i numeri suddetti per i quali

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 3\,.$$

ii) e quanti di questi ultimi sono divisibili per 9.

Il sistema numerico ternario è un sistema numerico posizionale in base 3, che utilizza tre simboli, tipicamente 0, 1 e 2, invece dei dieci simboli del sistema numerico decimale tradizionale. Un numero è rappresentato in base 3 da una combinazione di cifre 0, 1 e 2, ordinate secondo un sistema posizionale basato sulle potenze di tre. Dato che si può generare confusione con altre basi, si può specificare che si tratta di un numero ternario aggiungendo un pedice tre alla fine del numero. Ad esempio, si ha

$$121_3 = 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 16_{10}\,.$$

I calcolatori ternari fondano il loro funzionamento sulla base tre. Analogamente ai *bit*, le loro unità di informazione sono i *trit*, che possono assumere tre valori distinti. Ogni *trit* contiene l'equivalente di $\log_2 3 \cong 1.58496$ *bit* d'informazione. Alcuni computer ternari, come il *Setun*, definivano il *tryte* come un gruppo di sei *trit*, in parallelo coi *byte* che sono composti da otto *bit*.

i) Il numero 3, quale risultato della somma delle cifre, può essere ottenuto in due maniere differenti: tre 1 oppure un 1 ed un 2.

Nel *primo caso* ci sono

$$N_1(n) = \binom{n}{n-3} = \frac{n!}{3!\ (n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\,.$$

modi diversi di ottenere 3. Per comprendere come si sia giunti a questo risultato, basta considerare, come si dovrebbe fare ogni qual volta si tenta di risolvere un problema di calcolo combinatorio, un caso particolare; si supponga, ad esempio, che $n = 5$. In questo caso si hanno cinque cifre a disposizione, tre delle quali saranno 1, mentre le due rimanenti conterranno 0. Così è opportuno sistemare gli zeri, dato che gli uno verranno di conseguenza, come mostra la tabella che segue.

a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
1	1	1	0	0
1	1	0	1	0
1	0	1	1	0
0	1	1	1	0
1	1	0	0	1
1	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1

Per costruire la precedente tabella si sono osservate due semplici regola: la somma per righe deve sempre dare tre e, poi, si sono disposti gli zeri. Si riconosce che si tratta di un totale di 10 righe, esattamente quante sono le combinazioni di $2 = 5 - 3$ elementi su 5 posti, cioè

$$N_1(5) = \binom{5}{5-3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{20}{2} = 10\,.$$

Si può anche agevolmente controllare, costruendo le rispettive tabelle, che

$$N_1(3) = \binom{3}{0} = 1\,,\;\; N_1(4) = \binom{4}{1} = 4\,.$$

Nel secondo caso, invece, le possibili maniere di ottenere 3 sono pari a

$$N_2(n) = n(n-1) = D_{n,2}\,,$$

cioè le disposizioni dei due elementi (1 e 2) sugli n posti disponibili. Per comprenderlo, si operi sempre nel caso $n = 5$ e si costruisca l tabella riportata di seguito, in cui si è fissato $a_1 = 1$ ed alle rimanenti quattro cifre si sono assegnati tutti i possibili valori, scelti tra 0 e 2. Questa situazione ha dato luogo a quattro maniere diverse di ottenere 3.

a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
0	0	0	2	1
0	0	2	0	1
01	2	0	0	1
2	0	0	0	1

Ebbene, bloccando volta a volta una colonna con il numero 1 una colonna, si ottengono in totale

$$N_2(5) = 5(5-1) = 20$$

Diverse possibilità. Si verifica pure agevolmente che

$$N_2(3) = 3(3-1) = 6\,,\;\; N_2(4) = 4(4-1) = 12\,.$$

Sommando i due valori trovati, si ottengono i casi complessivamente richiesti

$$N(n) = N_1(n) + N_2(n) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + n(n-1) = \frac{n(n-1)(n+4)}{6} .$$

ii) Si osservi che un multiplo di 9, espresso in base 3, termina almeno con due zeri, come mostrano gli esempi

$$9 = (100)_3 , \;\; 18 = (200)_3 , \;\; 45 = (1200)_3 , \;\; 117 = (11100)_3 .$$

D'altra parte, se un intero positivo m_k è multiplo di 9, esso si può scrivere nella forma

$$m_k = 9 \cdot k .$$

.Ciò comporta le due cifre più basse saranno entrambe nulle, dato che le prime due divisioni per 3 daranno resto nullo. Inoltre, per codificare nel sistema ternario il numero intero positivo k, si avranno a disposizione $n-2$ cifre e la somma di queste cifre deve essere uguale a 3, sicché

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2} = 3 .$$

Ma allora, sfruttando quanto dimostrato nel punto precedente, i multipli di 9 saranno pari a

$$M(n) = \frac{(n-2)(n-3)(n+2)}{6} = \frac{(n^2-4)(n-3)}{6} , \;\; \text{con} \;\; n \geq 3 .$$

Nella tabelle che segue sono stati enumerati, quale esempio, i primi sedici numeri divisibili per 9 e tali che la somma delle cifre faccia esattamente 3.

a_5	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
0	0	1	2	0	0
0	0	2	1	0	0
0	1	0	2	0	0
0	1	1	1	0	0
0	1	2	0	0	0
0	2	0	1	0	0
0	2	1	0	0	0
1	0	0	2	0	0
1	0	0	1	0	0
1	0	2	0	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0
1	2	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0
2	0	1	0	0	0
2	1	0	0	0	0

Seguono, in conclusione, i primi valori della successione $M(n)$.

n	3	4	5	6	7	8
$M(n)$	0	2	7	16	30	50

1998-1999-2) Quanti sono i riordinamenti distinti delle lettere della parola

$$MATEMATICA$$

tali che

(a) vi siano due M consecutive,

(b) non vi siano due vocali consecutive,

(c) siano verificate entrambe le condizioni precedenti?

(a) Essendo indistinguibili e consecutive, si possono considerare le due M come una stessa lettera. Bisogna, allora, trovare le permutazioni di

$$MATEATICA\,,$$

che sono le permutazioni con ripetizione

$$N_a = \frac{9!}{3! \cdot 2!} = 30240\,.$$

(b) Il termine "matematica" presenta cinque vocali e cinque consonanti. Non dovendo avere vocali consecutive ho due possibilità rispetto all'insieme delle vocali (α) e quello delle consonanti (β). Precisamente, si possono presentare i due casi seguenti:

• si alterna vocale a consonante oppure consonante a vocale e, dato che l'insieme delle vocali si permuta in $5!/3!$ e quello delle consonanti in $5!/(2!\,2!)$ maniere diverse, si conclude che in questo caso si avranno

$$N_{b1} = 2\frac{5!}{3!}\frac{5!}{2!\,2!}\ ;$$

• si inizia con l'insieme delle vocali e si finisce con lo stesso insieme; ad un certo punto si avranno due consonanti consecutive, cosa che può avvenire in quattro posti diversi, e gli insiemi si permutano come nel caso precedente, sicché

$$N_{b2} = 4\frac{5!}{3!}\frac{5!}{2!\,2!}\,.$$

La somma di questi due casi fornisce le permutazioni totali

$$N_b = N_{b1} + N_{b2} = 2\frac{5!}{3!}\frac{5!}{2!\,2!} + 4\frac{5!}{3!}\frac{5!}{2!\,2!} = 6\frac{5!}{3!}\frac{5!}{2!\,2!} = \left(\frac{5!}{2}\right)^2 = 3600\,.$$

(c) Se si desidera che siano verificate entrambe le condizioni precedenti, bisogna iniziare con una vocale e terminare con una vocale. L'insieme delle consonanti va considerato con soli quattro membri, analogamente al precedente caso, e si permuta in $4!/2$ modi. L'insieme a si permuta come al solito. Per non avere vocali consecutive, l'unico modo è seguire lo schema vocale seguita da consonante. In definitiva, risulta

$$N_c = \frac{5!\,4!}{3!\,2!} = 240\,.$$

2002-2003-1) Ad una gara di Formula 1 partecipano sei concorrenti, tra cui i due compagni di squadra Michael e Rubens. Sapendo che, per un ordine di scuderia, Rubens non può arrivare immediatamente davanti a Michael (ma può eventualmente arrivare due o più posizioni davanti), determinare quanti sono i possibili ordini d'arrivo, supponendo che tutti i sei concorrenti arrivino al traguardo.

Se non vi fosse il vincolo che Rubens non può arrivare immediatamente davanti a Michael (ma può eventualmente arrivare due o più posizioni davanti), i possibili ordini d'arrivo, dato che tutti i sei concorrenti arrivino al traguardo, sarebbero le permutazioni

$$N_0 = 6! = 720 \,.$$

Evidentemente sono di meno ed i cinque casi da escludere, nei quali Rubens arriva davanti a Michael, sono elencati di seguito:

1. Rubens arriva primo, Michael secondo o terzo;
2. Rubens arriva secondo, Michael terzo o quarto;
3. Rubens arriva terzo, Michael quarto o quinto;
4. Rubens arriva quarto, Michael quinto o sesto;
5. Rubens arriva quinto, Michael sesto.

In definitiva, si conclude che i possibili ordini d'arrivo, soddisfacenti la limitazione assegnata, sono

$$N = N_0 - (2 + 2 + 2 + 2 + 1) = 711 \,.$$

2008-2009-4) Un piccolo congresso scientifico conta 30 partecipanti, provenienti da 6 città, 5 per città. La sala da pranzo della sede del convegno dispone di 6 tavoli da 5 posti. Gli organizzatori, per favorire la conoscenza reciproca dei partecipanti, vogliono disporli in modo che in nessun tavolo siano presenti due scienziati provenienti dalla stessa città. In quanti modi è possibile disporre i partecipanti nei 6 tavoli?
Nota: considera i tavoli come distinti, ma considera uguali due disposizioni con gli stessi gruppi nei 6 tavoli (in altre parole, ignora l'ordine in cui i commensali sono seduti allo stesso tavolo). È più che sufficiente indicare il risultato come prodotto di potenze.

Per prima cosa ad ogni tavolo si deve associare una città mancante, ovvero l'unica città di cui nessun rappresentante è seduto al tavolo: questa scelta può essere fatta in 6! modi diversi. Dopo di che ogni città vede cinque tavoli, per cui il primo rappresentante potrà scegliere tra 5 tavoli, il secondo tra 4 e così via. Questo vale per ogni città, indipendentemente dalle altre.
Più dettagliatamente, si può dire che nel *primo tavolo* il primo scienziato si può sceglier tra 30; il secondo tra 25; il terzo tra 20; il quarto tra 15 ed il quinto tra 10, vale a dire

$$D_1 = 0 \cdot 25 \cdot 20 \cdot 15 \cdot 10 = 2\,250\,000 \text{ dsposizioni} \,,$$

che corrispondono a

$$C_1 = \frac{2\,250\,000}{120} = 18\,750 \text{ combinazioni} \,.$$

Procedendo in maniera analoga per il *secondo tavolo*, si hanno

$$C_2 = \frac{25 \cdot 20 \cdot 16 \cdot 12 \cdot 8}{120} = \frac{768\,000}{120} = 6\,400 \text{ combinazioni} .$$

Per il *terzo tavolo* risulta

$$C_3 = \frac{20 \cdot 16 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 6}{120} = \frac{207\,360}{120} = 1\,728 \text{ combinazioni} .$$

Per il *quarto tavolo* si ha

$$C_4 = \frac{15 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 4}{120} = \frac{38\,880}{120} = 324 \text{ combinazioni} .$$

Per il *quinto tavolo* si ottiene

$$C_5 = \frac{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{120} = \frac{3840}{120} = 32 \text{ combinazioni} .$$

Per il sesto tavolo, infine, si può scrivere

$$C_6 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{120} = \frac{120}{120} = 1 \text{ combinazione} .$$

Moltiplicando tra loro questi fattori, si può affermare che il numero di modi possibili è

$$N = 18\,750 \cdot 6\,400 \cdot 1\,728 \cdot 324 \cdot 32 \cdot 1 = 2\,149\,908\,480\,000\,000 ,$$

che si può più sinteticamente scrivere nella forma

$$N = 6! \cdot (5!)^6 = 2.14990848 \cdot 10^{15} .$$

200-2001-1) Se si vuole giocare al totocalcio con la certezza di fare 13 nel caso in cui nella colonna vincente il 2 appaia esattamente 3 volte, qual è il numero minimo di colonne da giocare?

Nel gioco del totocalcio, molto popolare in Italia, bisogna fare dei pronostici su tredici partite di calcio dei campionati di serie A, B e C. Per dare la vittoria alla squadra che gioca in casa bisogna indicare '1' sulla schedina, per dare un pareggio 'X' e per dare la sconfitta alla squadra di casa '2'. Allora si tratta di calcolare il numero delle disposizioni con ripetizione di tre elementi (1, X, 2) presi tredici alla volta

$$D'_{3,13} = 3^{13} = 1\,594\,323\,.$$

Come si vede il numero delle colonne da giocare per fare certamente un tredici è molto grande e bisognerebbe investire delle somme considerevoli per riuscire un tredici che nessuno assicura, *a priori*, essere milionario!

Per l'esercizio assegnato, tuttavia, il 2 appare esattamente 3 volte: ciò vuol dire che tre risultati sono sicuri e che, nelle rimanenti dieci giocate, il 2 non può essere presente. In definitiva, il numero di giocate da fare è

$$N = \binom{13}{3} \cdot D'_{2,10} = \frac{13!}{3! \cdot 10!} \cdot 2^{10} = 286 \cdot 1024 = 292\,864\,.$$

Sono meno del caso generale, ma comunque si tratta di giocare ancora tante colonne!

1983-1984-5) Una famiglia è composta da 5 maschi e 4 femmine. Qual è la probabilità che due individui presi a caso siano di sesso opposto?

La probabilità che il primo sia un maschio è

$$P(M_1) = \frac{5}{9}.$$

Restano, dopo questa prima scelta, 8 individui, di cui 4 maschi. La probabilità che la seconda scelta sia una femmina è

$$P(F_2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Dunque, applicando la definizione di probabilità condizionata, si può scrivere che

$$P(M_1 \cdot F_2) = P(F_2/M_1) \cdot P(M_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{18}.$$

D'altra parte, partendo dalla ipotesi che il primo individuo scelto sia una femmina, si perviene al risultato

$$P(F_1) = \frac{4}{9} \quad \rightarrow \quad P(F_1 \cdot M_2) = P(M_2/F_1) \cdot P(F_1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{9} = \frac{5}{18}.$$

La probabilità richiesta è, allora, la somma delle due precedenti

$$P = P(M_1 \cdot F_2) + P(F_1 \cdot M_2) = \frac{5}{18} + \frac{5}{18} = \frac{5}{9}.$$

Al medesimo risultato si poteva giungere in maniera più semplice, enumerando tutti i casi possibili. Precisamente, non è difficile concludere che

$5 \cdot 4 = 20$	sono le possibili coppie di sesso opposto,
6	sono le possibili coppie femminili,
10	sono le possibili coppie maschili.

Dallo quanto detto segue immediatamente che

$$P = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} = 55.\overline{5}\% \, .$$

1992-1992-6) Cinque amici vogliono visitare una mostra che si tiene a Firenze nel mese di Agosto. Per conto proprio, ognuno si propone di effettuare la visita in una certa data. Qual è la probabilità che vengano scelti cinque giorni diversi? E cinque giorni consecutivi?

Essendo il mese di agosto di 31 giorni, la probabilità che vengano scelti cinque giorni diversi vale

$$P_1 = \frac{31}{31} \cdot \frac{30}{31} \cdot \frac{29}{31} \cdot \frac{28}{31} \cdot \frac{27}{31} = \frac{657720}{923521} \cong 71.22\% \,.$$

Invece, per il calcolo della probabilità che vengano scelti cinque giorni consecutivi, il numero dei casi favorevoli è pari al numero delle quintuple consecutive, cioè

$$n_F = 31 - 5 + 1 = 27 \,,$$

mentre il numero dei casi possibili è costituito da tutte le possibili combinazioni

$$n_P = \binom{31}{5} = \frac{31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 31 \cdot 29 \cdot 7 \cdot 27 = 169\,911 \,.$$

Si conclude, in definitiva, che la probabilità che vengano scelti cinque giorni consecutivi vale

$$P_2 = \frac{27}{31 \cdot 29 \cdot 7 \cdot 27} = \frac{1}{31 \cdot 29 \cdot 7} = \frac{1}{6293} \cong 0.016\% \,,$$

un evento decisamente improbabile.

1994-1995-2) Pierino vuole fare una collezione di dinosauri. La collezione è formata da 5 esemplari diversi e la mamma gli compra 7 scatole contenenti un dinosauro ciascuna e tutti i dinosauri possono comparire con la stessa probabilità. Qual è la probabilità che Pierino riesca a terminare la sua collezione con queste 7 scatole?

Si indichi la collezione completa dei cinque esemplari di dinosauro con l'insieme

$$D = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\} .$$

Quando si acquistano scatole con i dinosauri, tutti i casi possibili si possono identificare con le disposizioni con ripetizione di 5elementi su 6posti, cioè

$$D'_{5,6} = 5^6 .$$

Acquistando la *prima scatola*, Pierino è certo di assicurarsi uno dei dinosauri. Con l'apertura della *seconda scatola*, dato che tutti i dinosauri possono comparire con la stessa probabilità, si può trovare di fronte a due situazioni:

- ✓ è fortunato e trova un dinosauro diverso da quello che già possiede, un evento che avviene probabilità $p = 4/5$,
- ✓ è sfortunato e ritrova il dinosauro che ha già trovato nella prima scatola, un evento che avviene probabilità $q = 1 - p = 1/5$.

Pertanto, aprendo la seconda scatola, si può affermare che la probabilità di trovare un dinosauro diverso a quello da quello della prima scatola vale

$$P_2 = p .$$

All'apertura della *terza scatola*, la probabilità di trovare ancora un dinosauro diverso è pari al prodotto

$$P_3 = pq = p(1-p)\,,$$

giacché si avrà che il dinosauro diverso non è arrivato nella seconda scatola (q), ma nella terza (p). Continuando a ragionare in questa maniera, si ottiene che la probabilità che Pierino riesca a terminare la sua collezione con sole 7 scatole è

$$P = p + pq + pq^2 + pq^3 + pq^4 + pq^5 = p(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5)\,.$$

Ora accade che, essendo la somma pari a

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 = \frac{1-q^6}{1-q} = \frac{1-q^6}{p}\,,$$

la probabilità di completare la collezione vale

$$P = p\,\frac{1-q^6}{p} = 1 - q^6 = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^6 = \frac{15624}{15625} = 99.9936\%\,,$$

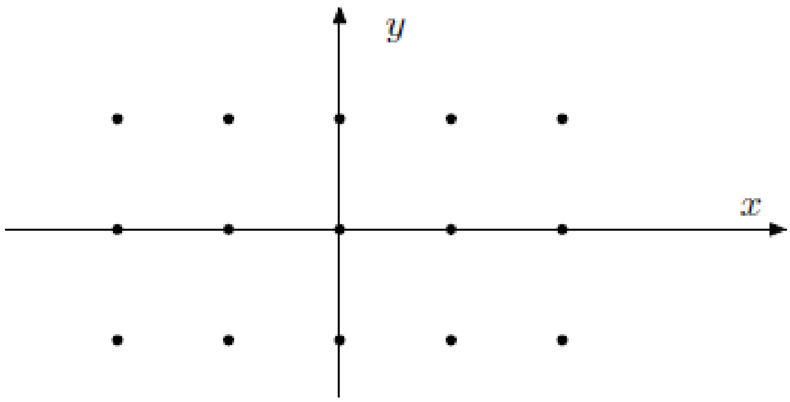
che è un valore molto elevato.

1997-1998-1) Un punto si muove su di un piano dotato di un sistema di riferimento ortogonale occupando soltanto i punti a coordinate intere e cambiando posizione a tempi discreti $t = 1, 2, \cdots$.

Partendo dall'origine (al tempo $t = 0$) il punto si muove alternativamente lungo la direzione x e lungo la direzione y, ogni volta di una unità di lunghezza. Si suppone che la prima mossa avvenga nella direzione x. Si suppone inoltre che gli spostamenti, sia nella direzione x che nella direzione y possano avvenire in senso positivo o negativo con uguale probabilità.

(a) Dimostrare che se per $t = n$ il punto si trova nell'origine, n è divisibile per 4.

(b) Calcolare la probabilità $p(n)$ che il punto si trovi nell'origine al tempo $t = n$.



(a) Ad ogni mossa il punto si sposta sugli elementi della griglia nelle quattro direzioni possibili. Affinché dopo n mosse il punto sia di nuovo nell'origine degli assi, il numero h degli spostamenti nel verso positivo delle ascisse deve uguagliare quello degli spostamenti nel verso negativo; analogamente, se vi sono k spostamenti verso le ordinate positive, altrettanti devono esservi verso quelle negative. D'altra parte, per ipotesi, il punto alterna una mossa lungo le ascisse con una mossa lungo le ordinate e, pertanto, deve risultare necessariamente $k = h$. In definitiva, si può scrivere

$$n = 2h + 2k = 4h \, .$$

(b) Per il punto precedente, se n non è multiplo di 4, nessuna sequenza di n mosse può riportare il punto mobile nell'origine e dunque in tal caso $p(n \neq 4k) = 0$.
Se $n = 4h$, invece, le sequenze di mosse possibili si ottengono prendendo in ogni maniera pensabile le $2h$ mosse lungo le ascisse e le $2h$ mosse lungo le ordinate. Ciò comporta che il numero totale di percorsi possibili vale

$$N = 2^{2k} \cdot 2^{2k} = 4^k \cdot 4^k = 4^{2k}\,.$$

Le sequenze di mosse favorevoli sono quelle per cui su $2k$ mosse lungo le ascisse, esattamente k sono mosse nel verso positivo, e su $2k$ mosse lungo le ordinate, di cui ve ne sono k nel verso positivo. Ognuna delle due scelte, fra loro indipendenti, può essere effettuata in

$$N_x = \binom{2k}{k}\,, \quad N_y = \binom{2k}{k}\,.$$

In definitiva, si conclude che

$$p(n = 4k) = \left[\frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}\right]^2\,.$$

1998-1999-4) Maria lancia 7 volte una moneta, Davide la lancia 6 volte. Qual è la probabilità che Maria ottenga più "teste" di Davide?

Una *prima soluzione* si può ottenere con il ragionamento che segue.
Dopo n=6 lanci a testa possono verificarsi le seguenti situazioni:

A. Maria ha fatto più teste di Davide;
B. Davide ha fatto più teste di Maria;
C. hanno totalizzato lo stesso numero di teste.

La probabilità di A è uguale a quella di B per simmetria e la si chiama q. La probabilità di C sarà allora $1-2q$. Ora, Maria lancia un'altra moneta. Sia V l'evento "Maria vince". Per la definizione del gioco

$$P(V/A) = 1$$

ovvero la probabilità che Maria vinca sapendo che dopo n=6 lanci a testa aveva fatto più teste di Davide è 1. D'altra parte, risulta

$$P(V/B) = 0\,,\ \ P(V/C) = \frac{1}{2}\,,$$

cioè vincerebbe se e solo se uscisse testa nell'ultimo lancio. In definitiva, si ha

$$P(V) = P(A)P(V/A) + P(B)P(V/B) + P(V/C)P(C) = \ q + 0 + \frac{1-2q}{2} = \frac{1}{2}\ .$$

Una *seconda soluzione*, molto più sintetica ed elegante, è descritta in quel che segue. Per simmetria, la probabilità che Maria faccia più teste è uguale alla probabilità che faccia più croci. Per qualsiasi configurazione di lanci si verifica una ed una sola di queste due situazioni (è impossibile che non faccia né più teste né più croci, ed è impossibile che faccia contemporaneamente più teste e più croci). Quindi, la probabilità cercata vale 1/2.

199-200-3) Stefano lancia $n+1$ monete e tra queste ne sceglie n in modo da massimizzare il numero di teste. Barbara lancia n monete. Chi ottiene un maggior numero di teste vince e, nel caso di parità, si assegna la vittoria a Barbara. Quale è la probabilità di vittoria di Stefano?

Una *prima soluzione* si può ottenere con il ragionamento che segue.
Dopo n=6 lanci a testa possono verificarsi le seguenti situazioni:

A. Maria ha fatto più teste di Davide;
B. Davide ha fatto più teste di Maria;
C. hanno totalizzato lo stesso numero di teste.

La probabilità di A è uguale a quella di B per simmetria e la si chiama q. La probabilità di C sarà allora $1-2q$. Ora, Maria lancia un'altra moneta. Sia V l'evento "Maria vince". Per la definizione del gioco

$$P(V/A) = 1$$

ovvero la probabilità che Maria vinca sapendo che dopo n=6 lanci a testa aveva fatto più teste di Davide è 1. D'altra parte, risulta

$$P(V/B) = 0\ ,\ \ P(V/C) = 12\ ,$$

cioè vincerebbe se e solo se uscisse testa nell'ultimo lancio. In definitiva, si ha

$$P(V) = P(A)P(V/A) + P(B)P(V/B) + P(V/C)P(C) = \ q + 0 + \frac{1-2q}{2} = \frac{1}{2}\ .$$

Una *seconda soluzione*, molto più sintetica ed elegante, è descritta in quel che segue. Per simmetria, la probabilità che Maria faccia più teste è uguale alla probabilità che faccia più croci. Per qualsiasi configurazione di lanci si verifica una ed una sola di queste due situazioni (è impossibile che non faccia né più teste né più croci, ed è impossibile che faccia contemporaneamente più teste e più croci). Quindi, la probabilità cercata vale 1/2.

2001-2002-2) Calcolare la probabilità che scrivendo a caso 3 lettere A, 3 lettere B e 3 lettere C nelle caselle di una scacchiera 3×3, due lettere uguali non stiano mai sulla stessa riga o sulla stessa colonna.

Tutti i casi possibili sono rappresentati dalle permutazioni con ripetizione delle tre lettere A, B, C sui nove posti disponibili, vale a dire

$$N = \binom{9}{3\,,3\,,3} = \frac{9!}{3!\,3!\,3!} = \frac{7!}{3} = 1680\,.$$

È possibile scegliere la prima riga tra le 6 permutazioni di ABC, la seconda riga tra le 2 permutazioni senza punti fissi, la terza è obbligata. Quindi, i casi favorevoli sono

$$N_F = 6 \cdot 2 \cdot 1 = 12\,.$$

Infine la probabilità che due lettere uguali non stiano mai sulla stessa riga o sulla stessa colonna vale

$$P = \frac{N_F}{N} = \frac{3 \cdot 12}{7!} = \frac{1}{140}\,.$$

2002-2003-3) Angelo e Barbara fanno il seguente gioco: Angelo lancia due dadi e Barbara ne lancia uno solo. Vince Angelo se il più alto dei suoi punteggi è strettamente maggiore di quello di Barbara, in caso contrario vince Barbara. Se i dadi sono cubici, con punteggi da 1 a 6, quale dei due giocatori ha la maggiore probabilità di vincere? E se i dadi hanno punteggi da 1 a 3 (ripetuti ciascuno su due facce)?

Angelo vince sicuramente se, detto x il più alto dei suoi punteggi, Barbara realizza un numero strettamente minore di x. Così, ad esempio, se l'uno, l'altro o entrambi i dei due dadi lanciati da Angelo segnano un sei, Barbara perde se realizza nel suo lancio uno, due, tre, quattro o cinque e la probabilità che ciò accada vale

$$P_6 = \frac{3}{36} \cdot \frac{5}{6}.$$

In generale, per calcolare la probabilità complessiva P_A che Angelo vinca, si può scrivere

$$P_A = \frac{3}{36} \cdot \left(\frac{5}{6} + \frac{4}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} = \frac{5}{24} = 20.8\overline{3}\% .$$

Per contro, non ammettendo il gioco alcuna situazione di parità, Barbara ha una probabilità di vincere complementare a quella di Angelo e pari a

$$P_B = 1 - P_A = 1 - \frac{5}{24} = \frac{19}{24} = 79.1\overline{6}\% ,$$

vale a dire che è quasi quattro volte più probabile che vinca Barbara.

2006-2007-5) Un test di matematica è costituito da dieci quiz a risposta “sì” o “no”. Ogni risposta corretta vale 1, ogni risposta errata vale -1, ogni risposta omessa vale 0. Il test è superato se si raggiunge un totale di 6.

(a) Qual è la probabilità che, dando dieci risposte a caso, si fornisca la risposta corretta ad esattamente otto domande?

(b) Qual è la probabilità che, dando dieci risposte a caso, si superi il test?

(c) Qual è la probabilità che, conoscendo la risposta corretta a quattro domande, e rispondendo a caso a quattro delle sei rimanenti, si superi il test?

Uno dei problemi che capitano frequentemente nel calcolo di probabilità è quello di calcolare la probabilità che un dato evento capiti k volte su n prove effettuate. Ad esempio, lanciando sei volte un dado, si vuole determinare la probabilità di ottenere tre volte il valore due. Detta p rappresenta la probabilità che si verifichi un dato evento, la probabilità che lo stesso evento si verifichi k volte su n prove effettuate è pari a

$$P = \binom{n}{k} p(1-p)^k \quad \text{con} \quad k = 1, 2, 3, \cdots, n\,.$$

(a) La prima domanda equivale a chiedere quale sia la probabilità di sbagliare due domande e di indovinarne otto. Essendo equiprobabile ogni risposta, questa probabilità vale

$$P_a = \binom{10}{2} \frac{1}{2^{10}} = \frac{45}{1024} = 4.39453125\%\,.$$

(b) La risposta alla seconda domanda coincide in parte con la prima, dato che, indovinare otto domande e sbagliarne due, vuol dire totalizzare sei risposte esatte, cioè superare il test. Bisogna ancora considerare i casi di nove risposte esatte o di dieci risposte esatte e, pertanto, si può scrivere

$$P_b = \binom{10}{2}\frac{1}{2^{10}} + \binom{10}{1}\frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{10}} = \frac{45+10+1}{1024} = \frac{7}{128} = 5.46875\% \,.$$

(c) Per il terzo esperimento aleatorio si suppone che quattro risposte esatte, vale a dire quattro punti, siano già assicurati, due vengono tralasciate, mentre bisogna tentare di dare risposta a quattro domande. Per superare il test, bisogna totalizzare al minimo sei punti, per cui due risposte esatte non bastano, dato che con sei risposte esatte e due sbagliate si realizzano quattro punti, vale a dire che bisogna rispondere correttamente almeno a tre risposte giuste ed ottenere sei oppure otto punti. La percentuale di rispondere correttamente almeno a tre domande è pari a

$$P_c = \binom{4}{3}\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} = \frac{4+1}{16} = \frac{5}{16} = 31.25\% \,.$$

2007-2008-1) Un turista parte per un viaggio di 300 km in autostrada; alla partenza ha fatto il pieno di carburante, e con il pieno ha un'autonomia di 200 km; ma, a causa di uno sciopero, i distributori di benzina hanno una probabilità del 50% di essere chiusi; lungo l'autostrada il turista troverà un distributore ogni 100 km, e, se il distributore sarà aperto, ogni volta farà il pieno. Che probabilità ha il turista di arrivare a destinazione? E quale sarebbe la probabilità se il viaggio fosse lungo 800 km? (Nota: per "probabilità" si intende il rapporto fra il numero dei casi favorevoli e il numero totale dei casi)

Se la distanza da percorrere è di 300 km ed il turista trova un distributore ogni 100 km, tutti i casi possibili sono enumerati nella tabella che segue, laddove con il simbolo C si intende che il distributore aderisce allo sciopero, quindi è chiuso, mentre con il simbolo A si intende il distributore non aderisce allo sciopero, quindi è aperto.

D_1	D_2
C	C
C	A
A	C
A	A

Il distributore D_1 è quello che il turista incontra dopo aver percorso 100 km, D_2 lo incontra dopo 200 km; quello di arrivo è inutile. Ad esempio, la terza riga indica che il turista incontra il primo distributore utile dopo 100 km, ideale per fare rifornimento e proseguire il suo viaggio. Pertanto, i casi favorevoli al turista sono 3. Tutti i casi possibili sono $4 = 2^2$, cioè tutte le disposizioni con ripetizione di due elementi su due posti. Si conclude che la probabilità il turista arrivi a destinazione

$$P_1 = \frac{3}{4} = 75\% \,.$$

Nella seconda situazione, cioè se il turista deve percorrere 800 km, le cose si complicano un pochino. Tutti i casi possibili sono $128 = 2^7$, cioè tutte le disposizioni con ripetizione di due elementi su sette posti. Per enumerare i casi favorevoli, dal momento che i distributori chiusi non possono essere più di quattro, si distinguono i casi che seguono.

α) I distributori chiusi sono quattro. Si ha un solo ordinamento favorevole.

D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7
C	A	C	A	C	A	C

β) I distributori chiusi sono tre.

D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7
C	A	C	A	C	A	A
C	A	C	A	A	C	A
C	A	C	A	A	A	C
C	A	A	C	A	C	A
C	A	A	C	A	A	C
A	C	A	C	A	C	A
A	C	A	C	A	A	C
A	C	A	A	C	A	C
A	A	C	A	C	A	C
A	A	A	C	A	C	A

Gli ordinamenti favorevoli sono

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10\ .$$

γ) I distributori chiusi sono due.

D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7
C	A	A	A	A	A	C
C	A	A	A	A	C	A
C	A	A	A	C	A	A
C	A	A	C	A	A	A
C	A	C	A	A	A	A
A	C	A	A	A	A	C
A	C	A	A	A	C	A
A	C	A	A	C	A	A
A	C	A	C	A	A	A
A	A	A	C	A	A	C
A	A	A	C	A	C	A
A	A	C	A	A	A	C
A	A	C	A	A	C	A
A	A	C	A	C	A	A
A	A	A	A	C	A	C

Gli ordinamenti favorevoli sono

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15.$$

δ) Il distributore chiuso è uno. Allora, i distributori aperti sono sei e gli ordinamenti favorevoli sono 7.

D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7
C	A	A	A	A	A	A
A	C	A	A	A	A	A
A	A	C	A	A	A	A
A	A	A	C	A	A	A
A	A	A	A	C	A	A
A	A	A	A	A	C	A
A	A	A	A	A	A	C

ε) Tutti i distributori sono aperti. Il solo ordinamento possibile è anche favorevole.

D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7
A	A	A	A	A	A	A

Riassumendo, gli ordinamenti favorevoli sono

$$1 + 7 + 15 + 10 + 1 = 34$$

e la probabilità che il turista arrivi a destinazione vale

$$P_2 = \frac{34}{128} = \frac{17}{64} = 26.5625\% \,.$$